EXERCICE N°1 : 30' 6 points

1°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\sin(x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur $[0,1]$.

b) On note g^{-1} la fonction réciproque de f. Déterminer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x\in[0,1[$, $\left(g^{-1}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

e) En déduire la valeur de $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2°) Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

a) Calculer I_1.

b) Calculer I_3 à l'aide d'une intégration par partie.

3°) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer la valeur moyenne de f sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a : $1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le\sqrt{2}$.

c) En déduire que $\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. Déterminer alors la limite de (I_n).

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit la suite u définie sur IN par : $u_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\ dx$ et $u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ dx$, $n\in IN^*$.

1°) a) Calculer u_0 et montrer que u est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Qarray.tn - Anna Blech - Qarray.tn